2. Übung zu: Kosmologie und frühes Universum

(Abgabe: 14.5.2003)

Aufgabe 1: Komponenten des Universums

Aus der Friedmann-Gleichung in der Form

$$H^2(a) \;=\; H_0^2 \left(\Omega_r a^{-4} + \Omega a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda\right) \tag{1}$$

lässt sich die relative Bedeutung der verschiedenen Komponenten des Universums zu verschiedenen Zeiten ablesen. Dies soll in einer Grafik veranschaulicht werden. Wähle zunächst die aktuellen Werte $\Omega = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_r = 8.3 \cdot 10^{-5}$ und $\Omega_k = 0$ bei $z = 0$ bzw. $a = 1$ und berechne daraus $H^2(a)$. Normiere nun die Dichten mit $H^2(a)$ (z.B. $\Omega(a) = 8\pi G\,\rho(a)/3H^2(a)$), so dass für alle a(t)

$$1 \;=\; \Omega(a) + \Omega_\Lambda(a) + \Omega_r(a) + \Omega_k(a) \tag{2}$$

gilt, und trage die $\Omega_i(a)$ gegen $\log a$ (von -5 bis 1) auf. Diskutiere die verschiedenen Phasen der Entwicklung.
Wiederhole die Aufgabe für ein offenes Universum ($\Omega = 0.3$) ohne kosmologische Konstante.

Aufgabe 2: Milne-Kosmos

Der Milne-Kosmos enthält keine Materie $\Omega \equiv 0$. Damit verschwindet die Krümmung und man erhält die Minkowski-Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie. Die Metrik lässt sich also schreiben als

$$ds^2 = dt^2 - \left(dr^2 + r^2\, d\psi^2\right). \tag{3}$$

Vom Ursprung $r = 0$ bewegt sich eine Schar von Beobachtern, beginnend bei $t = 0$ mit konstanten Geschwindigkeiten $v = r/t \le c$ radial nach aussen. Die Uhren werden bei $t = 0$ synchronisiert. Berücksichtige die Zeitdilatation um die von den bewegten Beobachtern gemessene Zeit t' zu bestimmen. Gib nun die Minkowskikoordinaten t und r als Funktion der neuen Koordinaten t' und ω an, mit $\tanh\omega = v/c$, und transformiere die Minkowskimetrik (3) auf die neuen Koordinaten. Diskutiere das Ergebnis. Inwiefern tritt hier Krümmung auf?

Aufgabe 3: Lösungen der Friedmann-Gleichungen

In der Vorlesung wurden verschiedene Lösungen für die zeitliche Entwicklung des Skalenfaktors $a(t)$ in einem Universum mit jeweils einer Komponente angegeben. Hier sollen nun Lösungen der Friedmann-Gleichungen mit zwei Komponenten untersucht werden.

a) Integriere Gl.(1) für $\Omega < 1$ und $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega$ um $a(t)$ zu erhalten. Welches Alter ergibt sich für das Universum, wenn man bei $z = 0$ die Werte $\Omega = 0.3$ und $\Omega_\Lambda = 0.7$ einsetzt? Wie alt war das Universum bei $z = 1$ bzw. $z = 1000$?

b) Für ein Universum mit Krümmung aber ohne kosmologische Konstante findet man parametrische Lösungen $a = a(\eta)$, $t = t(\eta)$. Gib diese für $\Omega < 1$ und $\Omega > 1$ an und berechne damit das heutige Weltalter für $\Omega = 0.3$ und $\Omega = 2$.