Das Milne-Universum: Die Expansion des Kosmos als relativistische Explosion

Markus Pössel
*Haus der Astronomie, MPIA-Campus, Königstuhl 17, 69124 Heidelberg, Germany**

Kosmische Expansion als relativistische Explosion? Das mag auf den ersten Blick paradox erscheinen — schließlich lernt man in der Kosmologie recht früh, dass der Urknall keine klassische Explosion sein kann, mit einem Mittelpunkt, von dem aus Galaxien in alle Richtungen in den leeren Raum hineinfliegen. Doch das, so zeigt sich, ist ein Problem der klassischen Physik. Das Modell einer relativistischen Explosion dagegen vermag es erstaunlich gut, die kosmische Expansion zu beschreiben. Es basiert in seiner einfachsten Variante, für die Schule praktisch, auf der Physik der speziellen Relativitätstheorie und liefert Einsichten in die Eigenschaften expandierender Universen, die sich auch auf die exakt formulierten Modelle übertragen lassen, auf denen die moderne Kosmologie fußt.

Dieser Artikel ist erschienen in der Zeitschrift *Astronomie+Raumfahrt im Unterricht* 57 (2020) 6, S. 10–14.

Betrachten wir das folgende Modell-Universum, das ganz den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie folgt. Es wurde historisch gesehen als Alternative zu den herkömmlichen kosmologischen Modellen aufgestellt (Milne 1934), hat sich aber mittlerweile als praktisches pädagogisches Werkzeug erwiesen, um jene Modelle besser zu verstehen (z.B. Ellis & Williams 2000, Rindler 2001).

Unsere eigene Galaxie, von der aus wir das Universum beobachten, möge sich kräftefrei durch den Raum bewegen. Wir können also ein Inertialsystem einführen, in dessen Raumnullpunkt unsere Galaxie ruht. Betrachten wir erst einmal nur eine der drei Raumdimensionen, sagen wir: die x-Richtung. Um uns herum mögen sich unzählige weitere Galaxien kräftefrei bewegen, und zwar so, dass alle ihre Weltlinien zu der Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$ ihren Anfang nahmen. Das Ereignis $t = 0$, $x = 0$ ist der Urknall unseres Modelluniversums. Die kräftefreie Bewegung bedeutet, dass die Weltlinie jeder dieser Galaxien eine Raumzeitgerade ist, entsprechend einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in (positive oder negative) x-Richtung. Und strenggenommen sollten sich natürlich auch in unserem Modelluniversum die Galaxien erst einige hunderte Millionen Jahre nach dem Urknall bilden — was uns aber nicht daran hindern soll, ihre geraden Weltlinien bis zum Urknall zurückzuverfolgen und zu beschreiben, was ein hypothetischer entlang jener Weltlinien bewegter Beobachter um sich herum beobachten bzw. messen würde (Abbildung 1).

Jede der anderen Galaxien hat in unserem gewählten Inertialsystem eine feste, konstante Geschwindigkeit. Vereinfacht reden wir im Folgenden von der „Galaxie β“, wenn wir diejenige Galaxie meinen, die in unserem Inertialsystem die konstante Geschwindigkeit $v = \beta \cdot c$ besitzt. Die Galaxien mögen den möglichen Wertebereich bis beliebig nahe an den Wert $\beta = 1$, das wäre Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit, ausreizen. In Wirklichkeit muss gar nicht jede der Weltlinien β tatsächlich mit einer Galaxie besetzt sein; wir wissen im Gegenteil, dass das Weltall auf Größenskalen von wenigen Millionen Lichtjahren inhomogen ist, mit einzelnen Galaxien und dazwischen deutlich leereren Zwischenräumen. Wir bleiben trotzdem bei unserer Kurzformel; wenn sie Sie irritiert (etwa später, wo wir infinitesimal benachbarte Weltlinien β und $\beta + \mathrm{d}\beta$ betrachten), rufen Sie sich einfach ins Gedächtnis, dass eigentlich Weltlinien gemeint sind, wenn ich anschaulich verkürzt von Galaxien rede.

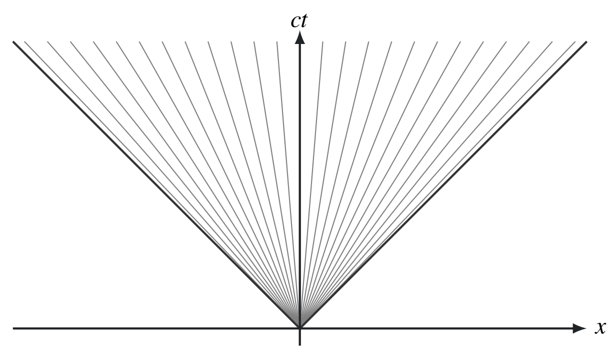

Abbildung 1. Modelluniversum mit geraden Weltlinien (von Galaxien), die sämtlich vom Urknallereignis bei $t = 0$, $x = 0$ ausgehen und den Vorwärtslichtkegel jenes Ereignisses ausfüllen.

Unser Modell soll wiedergeben, dass all die Galaxien, die dort auseinanderfliegen, gleichberechtigt sind. Das ist erste Hälfte des kosmologischen Prinzips, demzufolge das Universum zumindest im Mittel überall, für jeden Beobachter auf einer dieser Galaxien, dieselben Eigenschaften haben sollte. Die zweite Hälfte ist, dass der Kosmos auch in jede Richtung im Mittel gleich aussieht. Würde in jenem Modelluniversum dieselbe Entwicklung ablaufen wie in unserem eigenen, dann würde jeder Beobachter entlang einer der Galaxien-Weltlinien im Vergleich mit der entlang der Weltlinie mitgeführten Uhr dieselbe kosmische Geschichte dokumentieren können, also etwa nach rund einer Millionstel Sekunde den Zusammenschluss der Quarks zu Protonen und Neutronen, in den ersten Minuten die Bildung von Helium und anderen leichten Atomkernen, 380.000 Jahren die Entstehung der ersten Atome und die Freisetzung der kosmischen Hintergrundstrah-

* poessel@hda-hd.de

lung und so weiter. Auch nach Ende der markanten heißen Urknallphase würden solche Beobachter jeweils dieselben Messergebnisse erhalten. Sie würden insbesondere die Abnahme der Materiedichte im Universum als Funktion der Zeit in gleicher Weise und mit denselben Werten rekonstruieren.

Das bedeutet allerdings, dass die Zeitkoordinate t unseres Inertialsystems in einer entscheidenden Hinsicht gar nicht so gut geeignet ist, um das Universum zu beschreiben. Rufen wir uns kurz die Standardform der Lorentz-Transformation ins Gedächtnis, die in der speziellen Relativitätstheorie zwischen Inertialsystemen vermittelt, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen und die ihre Uhren jeweils zu dem Ereignis, als die Raumnullpunkte der Inertialsysteme zusammenfielen, auf null gestellt hätten. (In unserem Modell entspricht das dem Umstand, dass jede der Galaxien ihre mitgeführte Uhr beim Urknall auf null stellt.) Stellen wir die Zeit- und die x-Koordinate des einen Systems als ungestrichene Variablen dar, die des zweiten als gestrichene, dann gilt

$$ct' = \gamma(\beta) \cdot (ct - \beta x) \tag{1}$$

$$x' = \gamma(\beta) \cdot (x - \beta \cdot ct) \tag{2}$$

wobei der Gamma-Faktor die funktionale Form

$$\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3}$$

hat. Betrachten wir einen Schnappschuss unseres Universums bei einem konstanten Wert unserer Zeitkoordinate t, etwa $t = t_0$. Führte die Galaxie β ihrerseits eine Uhr mit, die sie beim Urknall-Ereignis auf null gestellt hätte, dann würde diese mitgeführte Uhr auf unserem Schnappschuss die Zeit

$$t' = \frac{t_0}{\gamma(\beta)} < t_0 \tag{4}$$

anzeigen, Ausdruck der relativistischen Zeitdilatation. Das heißt beispielsweise: Entspricht die Zeit t_0 gerade der Zeit der Freisetzung der kosmischen Hintergrundstrahlung auf unserer Weltlinie, dann befinden sich fernere Regionen des Universums, von unserem Inertialsystem aus betrachtet, gleichzeitig in einem früheren, noch heißeren Zustand vor jener Freisetzung. Unsere Zeitkoordinate t ist damit eine ungünstige Wahl, wenn wir die verschiedenen Entwicklungsphasen des Kosmos beschreiben wollen — bei konstanten t-Werten befindet sich der Kosmos eben nicht an jedem Ort in der gleichen Entwicklungsphase, sondern je größer β ist, umso weiter zurückgeblieben ist der Entwicklungszustand der betreffenden fernen Galaxie gegenüber unserem eigenen.

Wir können alternativ eine andere Zeitkoordinate einführen, die absichtlich so definiert ist, dass sie die kosmische Evolution richtig wiedergibt — sprich: so, dass ein konstanter Wert jener Zeitkoordinate tatsächlich alle Galaxien, ob nah oder fern, in derselben Entwicklungsphase erfasst. Strenggenommen haben wir die nötigen Bestandteile dieser Koordinate sogar schon eingeführt: Wir nutzen nämlich einfach die mitbewegte Uhr auf jeder der Galaxien-Weltlinien, auf null gestellt beim Urknall, um jedem kosmischen Ereignis einen Zeitwert zuzuordnen, den wir kosmische Zeit taufen und mit τ bezeichnen. Da in unserem Universum (das, wie gesagt, den Vorwärtslichtkegel des Urknall-Ereignisses ausfüllt) durch jedes Ereignis genau eine der Galaxien-Weltlinien verläuft, kann man auf diese Weise tatsächlich jedem Ereignis einen eindeutigen Wert der kosmischen Zeitkoordinate zuordnen. Konkret: Zu dem Ereignis t, x gehört die Weltlinie $\beta = x/ct$, denn die Galaxie mit jenem Wert β ist per Definition diejenige, die sich zu der Zeit t am Ort $x = \beta \cdot ct$ befindet. Der Wert der kosmischen Zeitkoordinate für dieses Ereignis ist nach der Zeitdilatationsgleichung (4) gerade

$$\tau = t \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{c}\sqrt{(ct)^2 - x^2}. \tag{5}$$

Mit anderen Worten: im x-t-Raumzeitdiagramm unseres eingangs gewählten Inertialsystems liegen Ereignisse mit demselben kosmischen Zeitkoordinatenwert τ auf der Hyperbel

$$(c\tau)^2 = (ct)^2 - x^2. \tag{6}$$

Einige solcher Hyperbeln sind in Abbildung 2 eingezeichnet. Wir können als Gegenstück zur kosmischen Zeit auch eine kosmische Abstandskoordinate einführen. Längen im Raum messen wir ja in den üblichen Inertialsystem-Koordinaten, indem wir die Raumkoordinaten-Differenz gleichzeitiger Ereignisse bilden. Wenn wir die Länge eines in x-Richtung ausgerichteten Stabes bestimmen wollen, können wir die Differenz der x-Koordinaten des Anfangs- und des Endpunkts des Stabes bilden. Wir müssen dies allerdings, das ist bei einem bewegten Stab wichtig, zu ein und demselben Zeitpunkt t tun. Analog können wir auch für unsere kosmische Zeitkoordinate vorgehen: Wir

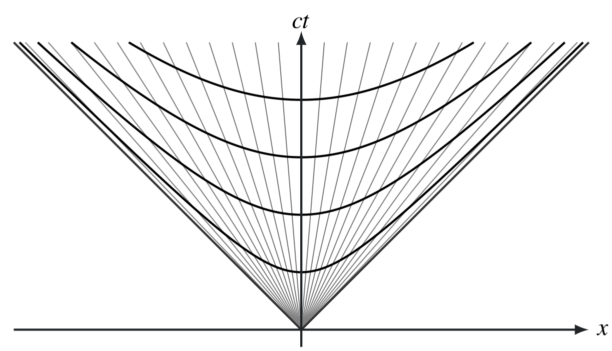

Abbildung 2. Schemazeichnung unseres expandierenden Universums aus frei fliegenden Galaxien, im x-t-Raumzeitdiagramm des mit unserer eigenen Galaxie verbundenen Inertialsystems. Eingezeichnet sind ausgewählte Weltlinien von Galaxien sowie vier Hyperbeln mit jeweils konstanter kosmischer Zeit τ.

können so etwas wie eine Länge entlang einer der Hyperbeln konstanter kosmischer Zeit $\tau = const.$ messen. Lokal, also in jedem infinitesimalen Abschnitt der Hyperbel, hat solch eine Längenmessung sogar einen physikalischen Sinn. Lokal ist die kosmische Zeitkoordinate ja gerade die Zeit im Ruhe-Inertialsystem der dort befindlichen Galaxie. Die dort bei festem Zeitkoordinatenwert gemessene Länge ist eine in jenem Ruhe-Inertialsystem gemessene Länge. Mit solchen kleinen, im jeweiligen Ruhe-Inertialsystem gemessenen Längen können wir Stückchen für Stückchen die Längenmessung entlang der Hyperbel vornehmen.

Schauen wir uns konkret denjenigen Teil der Hyperbel zum kosmischen Zeitwert τ an, der die Weltlinie der Galaxie β schneidet. Wie weit ist zu jenem Zeitpunkt die Galaxie $\beta + \mathrm{d}\beta$ von der Galaxie β entfernt, beurteilt im mitbewegten Inertialsystem der Galaxie β? Das ist unsere Antwort auf die Frage, wie lang das Teilstück der Hyperbel zwischen dem Schnittpunkt der Hyperbel mit der Weltlinie von β und dem Schnittpunkt mit der Weltlinie von $\beta + \mathrm{d}\beta$ ist. Am einfachsten lässt sich diese Frage beantworten, wenn wir die Geschwindigkeit der Galaxie $\beta + \mathrm{d}\beta$ im Inertialsystem der Galaxie β ausrechnen. Dazu nutzen wir die Geschwindigkeits-Additionsformel der speziellen Relativitätstheorie. In ihrer eindimensionalen Version, wo alle Bewegungen entlang derselben Raumrichtung verlaufen, lautet sie

$$u' = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}. \tag{7}$$

Dabei ist u' die Geschwindigkeit eines Objektes, gemessen vom Inertialsystem S' aus, u die Geschwindigkeit desselben Objekts vom Inertialsystem S aus, und v die Geschwindigkeit des Systems S vom System S' aus. Auf unsere Situation übertragen heißt das: Vom Ruhesystem der Galaxie β aus hat unsere eigene Galaxie die Geschwindigkeit $-\beta c$, von unserem eigenen Ruhesystem aus hat die Galaxie $\beta + \mathrm{d}\beta$ die Geschwindigkeit $(\beta + \mathrm{d}\beta) \cdot c$. Eingesetzt in die obige Formel hat demnach die Galaxie $\beta + \mathrm{d}\beta$ im Ruhesystem der Galaxie β die Geschwindigkeit

$$u = \frac{(-\beta + [\beta + \mathrm{d}\beta]) \cdot c}{(1 - (\beta + \mathrm{d}\beta) \cdot \beta)} \approx \frac{c \cdot \mathrm{d}\beta}{1 - \beta^2}, \tag{8}$$

wobei wir im letzten Schritt nur lineare Terme in $\mathrm{d}\beta$ behalten und Terme höherer Ordnung vernachlässigt haben. Der gesuchte Abstand der Galaxie $\beta + \mathrm{d}\beta$ von β, bestimmt im mitbewegten System von β, ist damit

$$\mathrm{d}s = u \cdot \tau = \frac{c \cdot \tau \cdot \mathrm{d}\beta}{1 - \beta^2}, \tag{9}$$

da sich die Galaxie $\beta + \mathrm{d}\beta$ ja von der Galaxie β aus gemessen über die gesamte Zeit τ hinweg mit jener konstanten Geschwindigkeit (8) von β fortbewegt hat. Indem wir diese kleinen Streckenstückchen $\mathrm{d}s$ aufsummieren, können wir für jede Galaxie β den Abstand $\chi(\tau, \beta)$ von unserer eigenen Galaxie, gemessen entlang der Hyperbel fester kosmischer Zeit τ, ausrechnen. Wie die d-Notation bereits nahelegt, können wir die Streckenstückchen als infinitesimal auffassen. Bilden wir das Integral, dann erhalten wir

$$\chi(\tau, \beta) = \int_0^\beta \frac{c \cdot \tau \cdot \mathrm{d}\beta'}{1 - (\beta')^2} = c\tau \cdot \operatorname{artanh}(\beta). \tag{10}$$

Damit haben wir ein komplettes „kosmisches Koordinatensystem“ hergeleitet: unsere kosmische Zeit τ und unsere kosmische Entfernungskoordinate χ. Zumindest im Vorwärtslichtkegel des Urknalls, wo sich alle unsere Galaxien befinden, können wir jedem Ereignis ein eindeutiges kosmisches Koordinatentupel τ, χ zuordnen. Die Berechnung von τ aus den Werten t, x hatten wir bereits in Gleichung (5) festgehalten; für $\chi(x, t)$ ergibt sich aus (5) und (10), dass

$$\chi(x, t) = \sqrt{(ct)^2 - x^2} \cdot \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{ct}\right). \tag{11}$$

Umgekehrt können wir die Koordinatenwerte t, x, die einem beliebigen Ereignis in unserem ursprünglichen Inertialsystem zukommen, durch die kosmischen Koordinatenwerte τ, χ ausdrücken als

$$t(\tau, \chi) = \tau \cdot \cosh\left(\frac{\chi}{c\tau}\right) \tag{12}$$

$$x(\tau, \chi) = c\tau \cdot \sinh\left(\frac{\chi}{c\tau}\right). \tag{13}$$

Wie in der speziellen Relativitätstheorie gerade in der Schule häufig der Fall, haben wir bei den bisherigen Rechnungen eine $1+1$-dimensionale Situation betrachtet, mit der x-Richtung als einziger räumlicher Dimension. Aber auch ohne dass wir die betreffenden Formeln im einzelnen hinschreiben sollte klar sein: Was wir hier abgeleitet haben, lässt sich auch in drei Dimensionen formulieren. Die radiale Richtung von unserer Galaxie aus spielt dabei die Rolle der x-Richtung in unseren bisherigen Rechnungen. Auch ohne explizit Kugelkoordinaten einzuführen, kann man einsehen: Für jede Galaxie im Universum könnten wir unser Koordinatensystem so hindrehen, dass deren Bewegung genau in x-Richtung verläuft und wir all unsere bisherigen Ergebnisse anwenden können.

Jetzt, wo wir konzeptuell wieder im Dreidimensionalen angekommen sind, können wir uns noch Gedanken über Dichten in unserem Modelluniversum machen. Wir hatten bereits gesagt, dass die Dichteentwicklung in Abhängigkeit von der kosmischen Zeit τ für jeden Beobachter auf einer der vielen Galaxien-Weltlinien dieselbe sein soll. Das hat für die Beschreibung der kosmischen Dichte im Ruhe-Inertialsystem unserer eigenen Galaxie interessante Konsequenzen. Betrachten wir erst einmal die Anzahldichte der Galaxien, also die Zahl der Galaxien pro Einheitsvolumen. Nehmen wir an, dass wir zu einer gegebenen Zeit τ in unserer direkten Umgebung die Anzahldichte n_0 messen. Dann muss auch ein Beobachter auf der Galaxie β zur kosmischen Zeit τ den gleichen Dichtewert n_0 messen. Doch das Einheitsvolumen, das jener Beobachter zugrunde legt, basiert auf dessen eigenem Längenmaß. Von unserem Inertialsystem aus beurteilt sind dagegen Längenmessungen an mitbewegten Objekten, die jener Beobachter in radialer Richtung vornimmt, um den Faktor

$$\frac{1}{\gamma(\beta)} = \sqrt{1-\beta^2} \tag{14}$$

verkürzt, entsprechend der speziell-relativistischen Längenkontraktion. In den beiden Richtungen transversal zur Bewegungsrichtung stimmen Längenmessungen unseres Inertialsystems dagegen mit jenen im Ruhesystem der Galaxie β überein. Volumenmessungen in den beiden Systemen, denken wir vereinfacht an einen Würfel, dessen eine Kantenrichtung genau die radiale Richtung ist, werden sich um denselben Faktor unterscheiden — in unserem Inertialsystem ist ein lokales Volumen, das der mitbewegte Beobachter zu V_0 misst, um den in Gleichung (14) gegebenen Faktor kleiner. Umgekehrt gilt daher: Wenn jeder mitbewegte Beobachter auf einer der anderen Galaxien dieselbe Anzahldichte n_0 misst, dann entspricht das in unserem eigenen Inertialsystem der Anzahldichte

$$n(\beta) = \frac{n_0}{1-\beta^2}. \tag{15}$$

Darüber, wie viele Teilchen sich in einem gegebenen Würfel befinden (entsprechend dem Zähler der Anzahldichte), sind sich alle Inertialbeobachter einig. Beim Volumen (Nenner der Anzahldichte) kommt dagegen der erwähnte Faktor (14) ins Spiel. Im Grenzwert $\beta \to 1$, mit anderen Worten: bei Annäherung an den Lichtkegel, wächst die Anzahldichte über alle Grenzen. Betrachten wir statt der Anzahldichte die Massendichte, in dem wir den Galaxien-Teilchen jeweils eine angemessene Masse geben, ist der Effekt noch ausgeprägter, denn von unserem Inertialsystem aus kommt für ferne Galaxien die relativistische Massenzunahme hinzu, die für $\beta \to 1$ ebenfalls über alle Grenzen geht.

Kommen wir nach diesen Vorbereitungen zu den zentralen physikalischen Fragen. Nach Gleichung (10) haben wir es bei unserem Modelluniversum mit einem Weltall zu tun, das mit dem Skalenfaktor $a(\tau) = c\tau$ expandiert. (Warum das c hinzunehmen? Reine Konvention. Der kosmische Skalenfaktor ist sowieso nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt.) Die Abstände all der anderen Galaxien von uns, und mit entsprechend anders gesetzten Integrationsgrenzen in (10) auch die Abstände all der Galaxien voneinander, nehmen sämtlich proportional zu diesem kosmischen Skalenfaktor zu. Soweit, so gut.

Wir können aus (10) eine Rezessionsgeschwindigkeit für die Galaxie β berechnen, also die Änderung des Abstands $\chi(\tau,\beta)$ von uns zu jener Galaxie mit der kosmischen Zeit. Das Ergebnis ist

$$v(\tau,\beta) \equiv \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\tau}(\tau,\beta) = c \cdot \operatorname{artanh}(\beta). \tag{16}$$

Aus dem Vergleich von (10) und (16) folgt direkt, dass in unserem Modelluniversum die Hubble-Lemaître-Relation

$$v(\tau,\beta) = \frac{1}{\tau} \cdot \chi(\tau,\beta) \tag{17}$$

gilt, mit dem Hubble-Parameter

$$H(\tau) = \frac{1}{\tau}, \tag{18}$$

dessen Kehrwert unserer Definition von τ nach gerade das Alter des Universums ist, nämlich die seit dem Urknall-Ereignis vergangene kosmische Zeit.

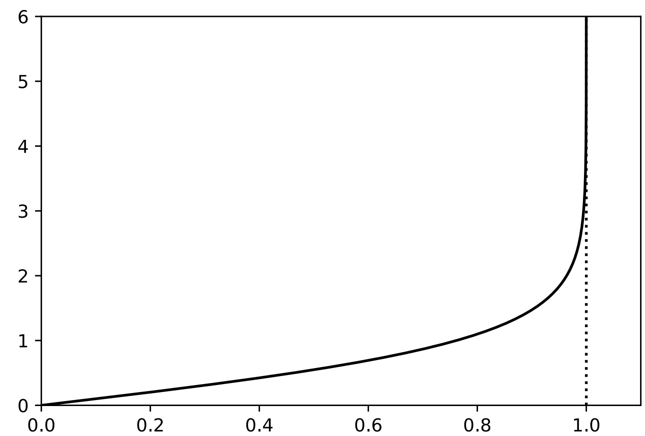

Abbildung 3. Funktionsverlauf des Areatangens hyperbolicus

Abbildung 3 zeigt nun den Verlauf des Areatangens hyperbolicus im Wertebereich von Null bis Eins. Ab etwa $\beta \approx 0{,}76$ wird $\operatorname{artanh}(\beta)$ größer als eins, die Rezessionsgeschwindigkeit damit größer als die Lichtgeschwindigkeit. Für $\beta \to 1$ wird $v(\tau,\beta)$ beliebig groß. Offenbar hat unsere ungewöhnliche Koordinatenwahl – die kosmische Zeit ist schließlich keine Zeitkoordinate eines Inertialsystems! – dazu geführt, dass hinreichend weit entfernte Galaxien zumindest für die mit den kosmischen Koordinaten definierte Rezessionsgeschwindigkeit (16) überlichtschnell unterwegs sind. Und das, obwohl wir uns komplett im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie befinden und die Geschwindigkeit jeder der Galaxien, auf ein beliebiges Inertialsystem bezogen, nie größer als die Lichtgeschwindigkeit wird. Das Milne-Universum illustriert eindrücklich, wie allein aufgrund der ungewöhnlichen Koordinatenwahl scheinbare, der speziellen Relativitätstheorie nicht widersprechende Koordinaten-überlichtgeschwindigkeiten auftreten können, die uns aber gleichzeitig nicht bekümmern müssen: Schließlich handelt es sich ausdrücklich nicht um in Inertialsystem-Koordinaten ausgedrückte, physikalische Geschwindigkeiten, für welche die Geschwindigkeits-Obergrenze Lichtgeschwindigkeit gilt.

Licht, das in der Galaxie β mit der Wellenlänge λ_a ausgesandt wird, gemessen im Ruhe-Inertialsystem von β, erreicht uns aufgrund des radialen speziell-relativistischen Dopplereffekts rotverschoben mit der in unserem eigenen Ruhesystem gemessenen Wellenlänge λ_e, wobei

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_a} \equiv 1 + z = \sqrt{\frac{1+|\beta|}{1-|\beta|}}. \tag{19}$$

Die erste Gleichung definiert die Wellenlängenverschiebung z, in der Kosmologie auch Rotverschiebung genannt, die zweite ist die eigentliche Dopplerformel. Wir können die kosmologische Rotverschiebung z aber auch noch auf eine andere Weise ausdrücken. Angenommen uns erreiche ein bestimmtes Lichtsignal zur Zeit $t_e = \tau_e$ (wobei am Ort unserer eigenen Galaxie ja die kosmische Zeit der Zeitkoordinate unseres Inertialsystems entspricht). Da das Licht mit der Geschwindigkeit c unterwegs ist, unsere Galaxie sich am Ort $x = 0$ befindet und die Galaxie β die Weltlinie $x = \beta \cdot ct$ hat, muss für die Aussendezeit t_a des Lichts, wieder ausgedrückt durch die Zeitkoordinate unseres eigenen Inertialsystems, gelten, dass

$$c|\beta|t_a = c(\tau_e - t_a). \tag{20}$$

Das lässt sich nach t_a auflösen zu

$$t_a = \frac{\tau_e}{1+|\beta|}. \tag{21}$$

Ersetzen wir jetzt mit Gleichung (5) die Inertialsystem-Koordinatenzeit t_a durch die entsprechende kosmische Zeit τ_a am Ort der aussendenden Galaxie β, so erhalten wir

$$\frac{\tau_e}{\tau_a} = \sqrt{\frac{1+|\beta|}{1-|\beta|}} = 1 + z. \tag{22}$$

Das können wir mit Hilfe unserer Definition des kosmischen Skalenfaktors $a(\tau)$ auch schreiben als

$$1 + z = \frac{a(\tau_e)}{a(\tau_a)}. \tag{23}$$

Gleichung (23) ist der ganz allgemeine Zusammenhang von kosmologischer Rotverschiebung und kosmischem Skalenfaktor, wie er weit über unser einfaches Modell hinaus im heutigen Standardmodell der Kosmologie gilt. Wir konnten diesen Zusammenhang im Milne-Universum ableiten und zeigen, dass er gleichzeitig einer speziell-relativistischen Doppler-Rotverschiebung (22) entspricht. Die Deutung der kosmologischen Rotverschiebung als Dopplereffekt hat dabei einen entscheidenden pädagogischen Vorteil: Sie suggeriert nicht, die Lichtteilchen würden auf dem Weg von der fernen Galaxie zu uns vermittels irgendeines physikalischen Prozesses „Energie verlieren“ — letzteres würde die berechtigte Frage nach sich ziehen, wo diese Energie denn bliebe, oder ob die Energieerhaltung in diesem Kontext nicht mehr gültig sei. Bei einem Dopplereffekt ist klar: Hier wird stattdessen die Energie ein und desselben Lichtteilchens von zwei verschiedenen Inertialsystemen aus gemessen, die relativ zueinander bewegt sind.

Soweit, so gut — aber wie ist unser Modell mit dem Umstand vereinbar, dass die kosmische Expansion keine Explosion mit einem ausgezeichneten Mittelpunkt ist, bei der Galaxien in den zuvor leeren Raum hineinfliegen? Auf den ersten Blick könnte man angesichts von Abbildung 1 auf die Idee kommen, genau jene Fehlvorstellung wäre der Kern unseres Modells. Beginnen wir mit der Mittelpunkts-Frage. Befindet sich unsere eigene Galaxie in irgendeiner Weise an einem ausgezeichneten Ort? Nein, denn jede andere der Galaxien kann die Situation in ihrem eigenen Inertialsystem beschreiben und gelangt zu genau denselben Ergebnissen. Sowohl die Definition der kosmischen Zeit τ als auch die Definition der kosmischen Abstände χ führt in dem neuen Inertialsystem zu denselben Zuordnungen von Abständen und ihren Änderungsraten. Das folgt direkt aus der auf die Ruhesysteme der jeweiligen Galaxien bezogenen Definition, lässt sich aber auch explizit mit Hilfe der Geschwindigkeits-Additionsformel (7) zeigen.

Was hat es mit den leeren Raumzeitbereichen rund um den Vorwärts-Lichtkegel auf sich —haben wir es dabei mit dem falschen Bild von einer Bewegung in den leeren Raum hinein zu tun? Auch da helfen die speziell-relativistischen Effekte. In unseren kosmologischen Koordinaten besitzt unser Vorwärts-Lichtkegel-Universum nämlich eine unendliche räumliche Ausdehnung. Springen wir in Gedanken von einer Galaxie zur nächsten und messen die überwundene Distanz jeweils mit den lokalen Maßstäben der nächsten Galaxie aus, dann gelangen wir nirgends an ein Ende. Unser auf diese Weise über lokale Messungen definierter kosmischer Abstand $\chi(\tau,\beta)$ wächst für $\beta \to 1$ über alle Grenzen. Hinzu kommt: Alle Einflüsse, die aus dem Vorwärtslichtkegel stammen, bleiben im Vorwärtslichtkegel, wie in Abbildung 4 für ein solches Ereignis dargestellt.

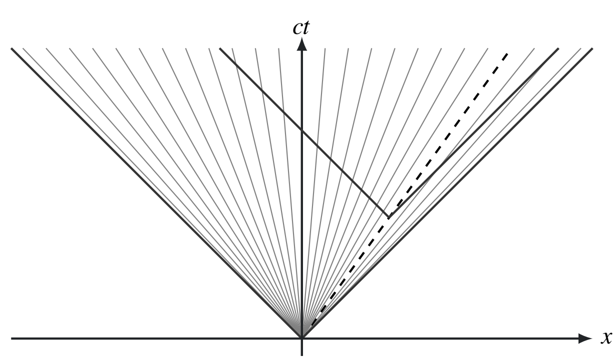

Abbildung 4. Alle Einflüsse von Ereignissen im Vorwärtslichtkegel des Urknalls bleiben per Definition innerhalb des Vorwärtslichtkegels.

Allenfalls gäbe es die Möglichkeit, dass Ereignisse von außerhalb des Vorwärtslichtkegels unser Modelluniversum beeinflussen könnten. Dass das unter realistischen Umständen nicht der Fall ist, zeigen unsere Überlegungen zu den Dichten. Sobald wir den Galaxien-Teilchen in unserem Modell etwas Masse verleihen, wachsen die entsprechenden Massendichten hin zum Lichtkegel über alle Grenzen. Dort befindet sich in den realistischeren Modellen, jenen nämlich, die auf Basis der Allgemeinen Relativitätstheorie formuliert sind, entsprechend eine Singularität — und damit insbesondere keine durchlässige Grenze, über die Einflüsse von außen in unseren Lichtkegel dringen könnten. Wie in Abbildung 2 zu sehen ist, entspricht der Grenzwert hin zum Lichtkegel der kosmischen Zeit $\tau = 0$; diese Randsingularität ist damit Teil der sogenannten Urknallsingularität am Anfang des Universums. Die relativistische Explosion vermeidet auf diese Weise die beiden Mankos der Vorstellung vom expandierenden Universum als einer klassischen Explosion: ausgezeichneten Mittelpunkt und Ausbreitung in den umgebenden leeren Raum hinaus.

Der „Energieverlust“ von Lichtteilchen bei der kosmologischen Rotverschiebung als Dopplereffekt, Überlichtgeschwindigkeiten als Konsequenz ungewöhnlicher Koordinatenwahl ohne gegen die relativistische Geschwindigkeitsbegrenzung zu verstoßen — das Milne-Universum rückt eine Reihe von Eigenschaften eines expandierenden Universums, die Schülerinnen und Schüler ansonsten stutzig werden lassen könnten, in den Erfahrungsbereich zumindest der speziellen Relativitätstheorie. Die wichtigsten Aussagen kann man übrigens auch ohne die Koordinaten-Integration ableiten, die für einige Schülerinnen und Schüler eine technische Hürde darstellen dürfte, indem man Inertialsysteme direkt zu einem „zusammengenähten“ Koordinatensystem verbindet (Pössel 2019).

Der pädagogische Nutzen des Grenzfalls Milne-Universum in allen Ehren, aber lassen sich diese Erklärungen auch auf die allgemein-relativistischen Modelle übertragen, also auf die Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Modelle eines expandierenden Weltalls, die der modernen Kosmologie zugrunde liegen?

Die Antwort ist ja (z.B. Bunn & Hogg 2009, Liebscher 2007, Narlikar 1994, Pössel 2020a). Auch ganz allgemein kann man jeder Galaxie im expandierenden Weltall eine relativistische Radialgeschwindigkeit zuordnen, die aber, obacht, nicht der üblichen Rezessionsgeschwindigkeit entspricht, wie sie im Hubble-Lemaître-Gesetz auftritt. Die Herleitung der relativistischen Radialgeschwindigkeit ist leider mathematisch sehr anspruchsvoll und nutzt Konzepte direkt aus der Werkzeugkiste der Differentialgeometrie gekrümmter Raumzeiten, insbesondere den sogenannten Paralleltransport. Hat man sie einmal ausgerechnet, sind die Eigenschaften der Radialgeschwindigkeit dagegen sehr anschaulich. Mit ihr lässt sich auch die allgemeine kosmologische Rotverschiebung mit der speziell-relativistischen Formel (19) ausdrücken. Der „Energieverlust“ der Lichtteilchen ferner Galaxien findet auch dort seine Erklärung als Dopplereffekt. Im Vergleich entpuppen sich die Rezessionsgeschwindigkeiten, die die Lichtgeschwindigkeit übersteigen können, als unphysikalische koordinatenbasierte Größen, über deren scheinbaren Widerspruch zur Lichtgeschwindigkeit als oberster Grenze man sich keine Sorgen machen muss — die Radialgeschwindigkeit von Galaxien jedenfalls bleibt immer unterhalb der Lichtgeschwindigkeitsgrenze. Als Bonus kann man in Universen, in denen die Radialgeschwindigkeit sich ab einer bestimmten Entfernung der Lichtgeschwindigkeit annähert, intuitiv verstehen, warum sich dort ein sogenannter kosmischer Horizont ausbildet: Bewegen wir uns aus Sicht solch einer Galaxie so gut wie lichtschnell radial fort, haben die Lichtsignale der betreffenden Galaxie Mühe, uns zu erreichen.

Insgesamt kann diese Interpretation der kosmischen Expansion also dabei helfen, bestimmte bereits vorhandene Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler für ein tieferes Verständnis zu nutzen, und Fehlvorstellungen zu vermeiden (Pössel 2020b).

Bunn, E. F. und D. W. Hogg, „The kinematic origin of the cosmological redshift“ in *Am. J. Phys.* 77, S. 688–694. DOI: 10.1119/1.3129103

Ellis, G. F. R. und R. M. Williams, *Flat and curved spacetimes*, 2nd edition (Oxford: Oxford University Press 2000)

Liebscher, D.-E., „Space-time curvature and recession velocities“ in *Astron. Nachr.* 328, S. 586–587 (2007), DOI: 10.1002/asna.200710752

Milne, E. A., „A Newtonian expanding Universe“ in *Quart. J. Math. Oxford* 5, S. 64–72 (1934), DOI: 10.1093/qmath/os-5.1.64

Narlikar, J. V., „Spectral shifts in general relativity“ in *Am. J. Phys.* 92, S. 903–907 (1994), DOI: 10.1119/1.17679

Pössel, M., „Teaching cosmology with special relativity: Piecewise inertial frames as a model of cosmic expansion“ in *Eur. J. Phys.* 40, article id 025602 (2019a). DOI: 10.1088/1361-6404/aaf2f7

Pössel, M., „Cosmic event horizons and the light-speed limit for relative radial motion,“ in *Open J. Astrophys.* 3, 8 (2020a). DOI: 10.21105/astro.1912.11677

Pössel, M., „Interpretations of cosmic expansion: anchoring conceptions and misconceptions“in *Phys. Educ.* 55(6), article id 065006 (2020b). DOI: 10.1088/1361-6552/aba3b1

Rindler, W., *Relativity: Special, General and Cosmological* (Oxford University Press, Oxford, 2001)