6. Übung zu: Kosmologie und frühes Universum

(Besprechung: Fr., 4.7.2003)

Aufgabe 1: "Frühes Universum" in Zahlen

Wenn schon im Vorlesungstitel von dem "frühen Universum" gesprochen wird, dann hilft es, einen Eindruck davon zu bekommen, um welche Skalen es sich im Extremfall dabei handeln kann.
Welche Größe haben die charakteristischen Skalen für Länge, Masse, Zeit, Energie, Dichte und Temperatur die sich aus den drei fundamentalen Konstanten der Quantenmechanik und Relativitätstheorie h, c und G bilden lassen? Machen Sie sich Gedanken darüber, in was für einem Zustand sich ein Universum mit diesem Alter und diesen charakteristischen Größen befindet.

Aufgabe 2: Hinweise auf Inflation

Aufgabe a: Nach der Vermessungen der Kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB), u.a. durch COBE und WMAP, ist bekannt, daß der Hintergrund auch auf allen Winkelskalen weitgehend homogen ist. D.h. zum Zeitpunkt der Entkopplung der Strahlung bei $z \sim 1100$ war auch der Materiehintergrund auf großen Skalen sehr homogen (Gebiete, die am Himmel von uns gesehen unter einem großen Winkel zueinander stehen, hatten in weiter Vergangenheit einen großen physischen Abstand zueinander).
Nun gibt es aber aufgrund der Endlichkeit des Weltalters den sog. Teilchen-Horizont $d_H(t)$, der den maximalen Radius für Ereignisse angibt, die durch Entsendung von Licht einen Beobachter kausal beeinflußt haben können. In der speziellen Relativitätstheorie wäre dieser $d_H(t) = ct$. In der ART ist für ein materiedominiertes Universum $d_H(t) = 3ct$. Zeigen Sie, daß sich letzteres aus der Bewegung eines Lichtstrahls in der Robertson-Walker-Metrik

$$c^2 \Delta t^2 - a(t)^2 \frac{\Delta r^2}{(1 - kr^2)} = 0$$

ergibt (Annahme: $\Omega = 1$ also Krümmung $k = 0$). Beachten Sie, daß dabei gilt $d_H(t) = a(t) \cdot r_H(t)$, weil r_H nur der Koordinatenradius des Horizontes ist.
Rechnen Sie mit $d_H(t)$ aus, welche maximalen durch uns beobachteten Winkelskalen danach für Homogenität des CMB erlaubt wären ($t_0 = 13.8$ Gyr, Entkopplung bei $z = 1100$, $H_0 = 65$ km s^{-1} Mpc^{-1}). Entspricht das der Beobachtung?

Aufgabe b: In der einfachen Robertson-Walker-Metrik gilt für die Ausdehnung des Weltalls $a(t) \propto t^{1/2}$ bzw. $a(t) \propto t^{2/3}$, während die Größe des Horizontes wie in 1a gezeigt $d_H \sim ct$ ist. Daraus folgt, daß für diesen Fall im Laufe der Zeit immer größere Teile des Universums in den Horizontes eines Beobachters hineinwandern. Dies ist in der Abbildung skizziert: wegen des Exponenten für t kleiner als 1 ist der Verlauf von $a(t)$ mit t zunächst

steiler als der des Horizontradius. Irgendwann, bei t_0, sind die Radien gleich und das Objekt wandert in den Horizont hinein.
Wie kann dies sein, wenn dies auch für Galaxien gelten soll? Diese sollten von ihren Massen und großräumigen Verteilung vollständig unabhängig sein von der Masse und Verteilung der Galaxien in der Umgebung des Beobachters, weil sie bis zum Eintritt in den Horizont mit diesen nicht kausal verbunden waren. Diese einfache Betrachtung muß also ergänzt werden. Modifizieren Sie das Diagramm derart, daß Sie eine kurze 'inflationäre' Phase der Ausdehnung in der Frühphase des Universums ($0 < t_{\rm start} < t_{\rm ende} < t_o$) einführen. Bei dieser ändert sich $a(t)$ mit der Geschwindigkeit $\gg tc$, so daß dieses Horizontproblem für $t = t_0$ nicht mehr auftritt, d.h. ein Objekt auch zu einem Früheren Zeitpunkt sich schon innerhalb des Horizontes befunden haben kann.