4. Übung zu: Kosmologie und frühes Universum

(Abgabe: Mi., 11.6.2003)

Aufgabe 1: Sphärischer Kollaps

In der Vorlesung hatten wir für die Dichtefluktuationen stets $\delta \ll 1$ angenommen. Um das Wachstum der Dichtefluktuationen bis in den nichtlinearen Bereich $\delta \geq 1$ zu verfolgen, wollen wir hier als einfachstes Modell den Sphärischen Kollaps behandeln. Vor dem Hintergrund eines mit nichtrelativistischer Materie der Dichte $\Omega_b = 1$ gefüllten Universums betrachten wir ein sphärisches Gebiet vom Radius $R(t)$ und der Masse M mit räumlich konstanter Überdichte $\delta(t)$.
Geben Sie die radiale Bewegungsgleichung für ein Testteilchen im überdichten Gebiet an und vergleichen diese mit der Friedmanngleichung für ein Universum der Dichte $\rho_b(1+\delta)$. Geben Sie das erste Integral, d.h. den Ausdruck für die Energieerhaltung an. Zeigen Sie mit dem Ansatz $R(\eta) = R_m(1-\cos\eta)/2 = R_m \sin^2(\eta/2)$, dass eine weitere Integration auf $t(\eta) = t_m(\eta - \sin\eta)/\pi$ führt und geben Sie die Beziehung zwischen R_m und t_m an. Zunächst soll nun das Wachstum der Überdichte exakt bestimmt werden. Zu einem sehr frühen Zeitpunkt $t_i \ll t_m$ sei $\delta(t_i) \simeq 0$ und die Masse des überdichten Gebiets $M = 4\pi\rho_b(t_i)R_i^3/3$ Zeigen Sie damit, dass

$$1 + \delta(t) \equiv \frac{\rho_p(t)}{\rho_b(t)} = \left(\frac{R_i}{R(t)}\right)^3 \left(\frac{t}{t_i}\right)^2 \qquad (1)$$

gilt. Bestimmen Sie die Überdichte zum Zeitpunkt der maximalen Ausdehnung zu $\delta_m = \delta(t_m) \simeq 4.55$. Verwenden Sie dabei $t_i \ll t_m$ und $R_i \ll R_m$, d.h. $t(\eta)$ und $R(\eta)$ in niedrigster Ordnung in η. Mithilfe von δ_m lassen sich nun R_i und t_i in Gl.(1) eliminieren. Geben Sie das so erhaltene $\delta = \delta(\eta)$ an. Zusammen mit $t = t(\eta)$ ist damit das Wachstum der Überdichte in parametrischer Form gegeben.
Um dieses Ergebnis mit der Vorhersage der linearen Theorie zu vergleichen, entwickeln Sie t und R für kleine η. Leiten Sie in niedrigster nichtverschwindender Ordnung in η ab, dass zum Zeitpunkt maximaler Ausdehnung $\delta_{lin}(t_m) \simeq 1.06$, und die Vorhersage der linearen Theorie für den Kollaps $\delta_{lin}(t_c) \simeq 1.69$ beträgt. Plotten Sie sowohl für die lineare Theorie, wie für das Sphärische Kollapsmodell δ gegen t/t_m. (Wie plottet man am sinnvollsten, um die Eigenschaften von $\delta(t)$ ablesen zu können?)
Die tatsächliche Überdichte der kollabierten Region wird weder durch die lineare Theorie richtig vorhergesagt, noch divergiert sie in einem realistischen Modell. Eine sinnvolle Abschätzung gewinnt man durch die Annahme, dass die Region nach dem Kollaps virialisiert ist. Zeigen Sie mit dem Virialsatz, dass der Radius des kollabierten Halos $R_H = R_m/2$ ist. Zeigen Sie außerdem, dass die Überdichte des kollabierten Halos nach der Virialisierung $1 + \delta_{vir} \equiv \rho_H/\rho_b(2t_m) \simeq 178$ beträgt.

Aufgabe 2: Drehimpuls eines Halos

Die Herkunft des Drehimpulses einer Galaxie lässt sich in der Zeldovich-Approximation auf einfache Weise ableiten. Wir benutzen physikalische Koordinaten:

$$\mathbf{x} = a\mathbf{r} = a(\mathbf{r}_0 - \nabla\phi_0\, D) \tag{2}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{a}\mathbf{r}_0 - \frac{d}{dt}(aD)\,\nabla\phi_0 \tag{3}$$

Der Drehimpuls eines Gebietes G ist definiert als

$$\mathbf{L} = \int_G dV\, \rho\, (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \tag{4}$$

Entwickeln Sie $\nabla\phi_0$ um den Schwerpunkt von G und zeigen Sie damit, dass näherungsweise gilt:

$$L_i = a^2 \dot{D}\, \epsilon_{ijk} T_{jl} I_{lk}. \tag{5}$$

Hier ist I_{lk} der Trägheitstensor von G und $T_{ij} = \partial_i \partial_j \phi_0$ der Gezeitentensor, bzw. Deformationstensor. Wie wächst für $\Omega = 1$ der Drehimpuls mit der Zeit?

Für ein Halo wird gewöhnlich nicht der absolute Wert des Drehimpulses angegeben, sondern der Drehimpulsparameter λ. Dieser ist definiert als der tatsächliche Drehimpuls dividiert durch den Drehimpuls, den das Halo haben müßte um allein durch Rotation gegen die Gravitation stabilisiert zu sein. Setzten Sie starre Rotation voraus und leiten λ als Funktion von L, M und $E \simeq -GM^2/R$ ab.