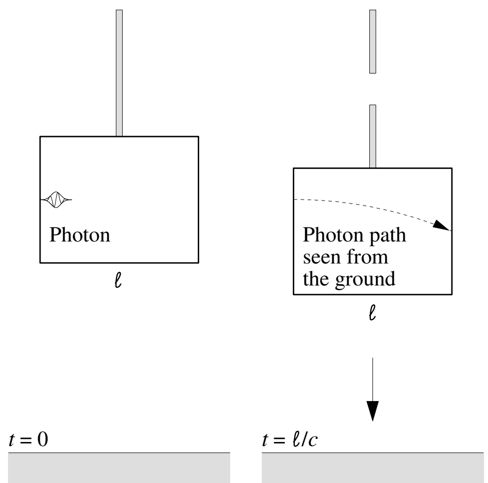
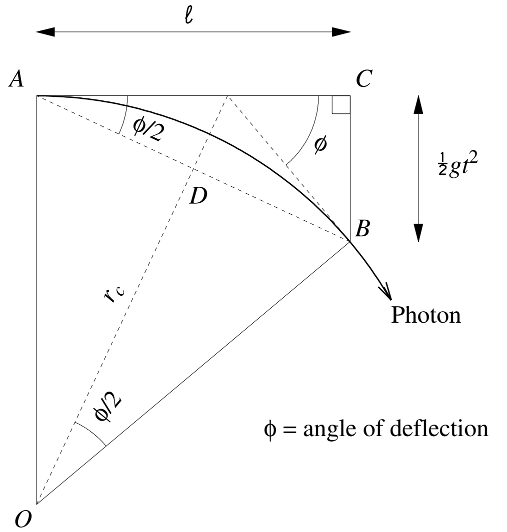
1. Übung zu: Kosmologie und frühes Universum

(Abgabe: Mi., 30.4.2003)

Aufgabe 1: Lichtablenkung aufgrund des Äquivalenzprinzips

In dieser Aufgabe soll eine Formel für die Winkelablenkung eines Lichtstrahls im Abstand r zu einen Himmelskörper der Masse M und der somit resultierenden Schwerebeschleunigung $g = \frac{GM}{r^2}$ abgeleitet werden. Dazu wird als Näherung angenommen, dass sich die Trajektorie des Lichts durch eine Kreisbahn mit dem Radius r_c beschreiben läßt (siehe Abbildungen).





Diese Aufgabe kann im wesentliche geometrisch gelöst werden:

1. Zeige, dass die Winkel BAC und ODB identisch sind
2. Die Dreiecke ODB und BAC sind somit ähnlich (warum?), zeige damit, dass für kleine ϕ gilt $r_c = \frac{c^2}{g}$.
3. Berechne den Krümmungsradius r_c und den Ablenkwinkel $\phi/2$ für einen nahe der Erdoberfläche ($g = 981\,\mathrm{cm/s^2}$) und einen nahe der Sonnenoberfläche ($g = 27400\,\mathrm{cm/s^2}$) passierenden Lichtstrahl.

Aufgabe 2: Ableitung der Friedmannschen Gleichungen aus den Einsteinschen Feldgleichungen

Ziel dieser Übung ist es die Friedmann-Gleichungen aus den Einsteinschen Gleichungen abzuleiten. Um den Aufwand dafür moderat zu halten soll der Raum als flach angenommen werden, was auch den Beobachtungen entspricht. Die Annahme von Homogenität und

Isotropie führt auf die Robertson-Walker Metrik

$$ds^2 = c^2\, dt^2 \;-\; a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \right]. \tag{1}$$

Für die Rechnungen sei nun $\kappa \equiv 0$ und $c = 1$, so dass die Metrik in kartesischen Koordinaten die Form $g_{mn} = diag(1, -a^2, -a^2, -a^2)$ annimmt.

Schritt 1: Berechnen Sie g^{mn} aus der Bedingung $g_{mn} g^{no} = \delta^o_m$.
Die Einsteinschen Gleichungen

$$G_{mn} := R_{mn} \;-\; \tfrac{1}{2} R\, g_{mn} = 8\pi G\, T_{mn} \tag{2}$$

sind Dgln 2.Ordnung in der Metrik. Mit dem vereinfachten Robertson-Walker Ansatz für die Metrik führen sie auf Dgln für den Skalenfaktor $a(t)$, die Friedmann-Gleichungen.

Schritt 2: Bestimmen Sie nun zunächst die Christoffelsymbole

$$\Gamma^l{}_{mn} = \tfrac{1}{2}\, g^{ls} \left(\partial_m g_{ns} + \partial_n g_{sm} - \partial_s g_{mn} \right). \tag{3}$$

Hinweis: hier und bei den folgenden Tensoren ist es hilfreich mit nur zwei verschiedenen Indizes zu arbeiten um z.B. $\Gamma^i{}_{0i}$ (keine Summation) zu bestimmen, wobei 0 für die zeitliche und i für die räumlichen Komponenten stehen, und dabei ausgiebig von der Symmetrie der Metrik Gebrauch zu machen (z.B. Homogenität $\Rightarrow$ alle partiellen Ableitungen nach Ortskoordinaten verschwinden etc.). Der Riemannsche Krümmungstensor ergibt sich aus den Christoffelsymbolen zu

$$R^k{}_{mnl} = \partial_m \Gamma^k{}_{nl} - \partial_n \Gamma^k{}_{ml} + \Gamma^k{}_{ms} \Gamma^s{}_{nl} - \Gamma^k{}_{ns} \Gamma^s{}_{ml}. \tag{4}$$

Dieser soll aber nicht vollständig berechnet werden, sondern nur die Kontraktion $R_{nl} = R^m{}_{mnl}$, der Ricci-Tensor. Durch eine weitere Kontraktion mit der inversen Metrik g^{mn} erhält man den Krümmungsskalar $R = R_{mn} g^{mn}$. Damit sind alle geometrischen Grössen bestimmt.

Schitt 3: Berechnen Sie die Komponenten des Ricci-Tensors R^{mn} und den Krümmungsskalar. Wie ist es zu erklären, dass man eine nichtverschwindende Krümmung erhält, obwohl wir zu Beginn vorausgesetzt haben, dass der Raum flach ist?
Bleibt noch die Quelle des Gravitationsfeldes, der Energieimpulstensor. Für eine ideale Flüssigkeit ist er

$$T_{mn} = (\varrho + p/c^2) u_m u_n \;-\; p\, g_{mn}, \tag{5}$$

und nimmt im Ruhesystem mit $u = (c, 0, 0, 0)$ eine einfache Form an.

Schritt 4:
Schreiben Sie nun die Einsteinschen Gleichungen als Dgln für $a(t)$. Zeigen Sie, dass die 0-0 Komponente der Friedmann-Gleichung

$$\left(\frac{\dot a}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \varrho \tag{6}$$

entspricht, während die i-i-Komponente unter Zuhilfenahme von dem letzten Ergebnis als

$$\left(\frac{\ddot a}{a} \right) = -\frac{4\pi G}{3} \left(\varrho + \frac{3\,p}{c^2} \right) \tag{7}$$

geschrieben werden kann.