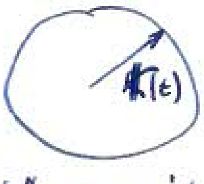
Das Expandierende Universum

(Schneider Kap. 4) ①
HWRix 27.5.2010

Grundannahmen: Gravitation dominiert auf großen Skalen (ART gültig)
Universum erscheint uns isotrop
Wenn von überall isotrop → homogen

Wie können wir diese Struktur beschreiben?
~~Kinematik~~ Geeignete Koordinaten
Betrachte (homogene) Kugel ~~von~~ radius $R(t)$



Mit-bewegte Koordinaten (co-moving coordinates) t_0 = jetzt

$\vec{r}(t) = a(t) \cdot \vec{x}$ $\quad$ $a(t)$: Skalenfaktor mit $a(t_0) = 1$

$$\vec{v}(\vec{r},t) \equiv \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{da(t)}{dt}\cdot\vec{x} = \dot{a}\vec{x} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r} \equiv H(t)\cdot\vec{r}$$

$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ $[s^{-1}]$ Expansionsrate ≈ (räumliche) Hubble-Konstante

$$\Delta v = v(\vec{r}+\Delta\vec{r},t) - v(\vec{r},t) = H(t)\Delta r \Rightarrow v = H_0 \cdot D$$

heute, von uns aus gesehen

~~Dynamik~~

Wie kann man expandierenden, homogenen und isotropen 3D Raum beschreiben? (Robertson-Walker Metrik)

~~Metrik~~

Metrik = "Abstandsdefinition"

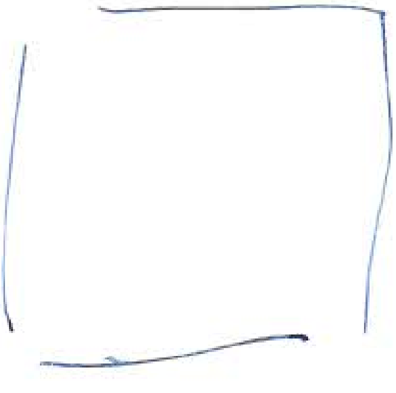
Beispiel 1: statisch, euklidischer Raum $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

Beispiel 2: isotrop, homogen, gekrümmt, 2D

$$dl^2 = R_c^2 d\vartheta^2 + R_c^2 \sin^2\vartheta \, d\varphi^2$$

oder mit $\vartheta = \frac{\hat{s}}{R_c}$

$$dl^2 = d\hat{s}^2 + R_c^2 \sin^2\left(\frac{\hat{s}}{R_c}\right) d\varphi^2$$



R_c = real: "sphärisch"; $R_c \to \infty$ "flach"

Robertson-Walker Metrik

2D-"sphäre" $\longrightarrow$ 3D unter Erhaltung der Isotropie & Homogenität

$$dl^2 = d\hat{\varsigma}^2 + R_c^2 \sin^2\left(\frac{\hat{s}}{R_c}\right) \cdot \left[d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right]$$

Zeitabhängigkeit:

Beispiel: "Weltlinie" $ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ "Minkowski Raum"

Photonen haben $ds^2 = 0$

Welche Zeitabhängigkeiten sind möglich?

homogen: $\frac{\hat{\varsigma}_i(t_1)}{\hat{\varsigma}_j(t_1)} = \frac{\hat{\varsigma}_i(t_2)}{\hat{\varsigma}_j(t_2)} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)} \Rightarrow \hat{\varsigma}(t) = a(t) \cdot r$

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)}{c^2}\left[r^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right)\right]}$$

allg. Form: 3D, zeitabhängig, isotrop, homogen

R = "Krümmung"

$a(t)$ = "Skalenfaktor"

NB: haben $a(t)$ noch nicht spezifiert

Allg. Relativitätstheorie verbindet $a(t)$ mit R

Entfernungen r sind nicht direkt beobachtbar

Keine Bezug auf einen Raum in den sich das Universum ausdehnt

$\rightarrow$ Metrik / Abstandsdefinition ist zeitabhängig

~~"Rotverschiebung"~~ $\cancel{? \; ds^2_{photon} = 0 \Rightarrow dt = -\frac{a(t)}{c} dr}$

$$\cancel{\int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} = -\int_r^0 dr = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} \Rightarrow \frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{1}{1+z}}$$

Was bestimmt die Ausdehnungsgeschichte, $a(t)$?

Modell

- schneiden wir uns eine 'Kugel' aus dem Universum und betrachten sie 'newtonsch'.

$$r(t) = a(t)\,x \qquad M(x) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 x^3 = \frac{4\pi}{3}\rho(t)\, r^3(t) = \frac{4\pi}{3}\rho(t) a^3(t)\, x^3$$

$$\rho(t) = \rho_0\, a^{-3}(t)$$

Betrachen wir jetzt ein Testteilchen

$$\ddot{r}(t) \equiv \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = -\frac{G M(x)}{r^2} = -\frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_0 x^3}{r^2}$$

$r(t) = a(t)\cdot x$

$\Longrightarrow$

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)\, a(t) \qquad \Big|\ \times 2\dot{a} \text{ und } \int dt$$

$$\dot{a}^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{1}{a} - Kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) a^2(t) - Kc^2$$

3 Fälle möglich:

$$K<0 \Longrightarrow \frac{da}{dt} > 0 \ \forall t$$

$$K=0 \Longrightarrow \frac{da}{dt} > 0 \ \ \text{ıı}$$

$$K>0 \Longrightarrow \frac{da}{dt} = 0 \text{ für } a_{max} = \frac{8\pi G \rho_0}{3Kc^2} \text{ ; danach } da/dt < 0$$

N.B. $K = 0$ für $\rho_{crit} := \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1{,}9\cdot 10^{-29}\,\frac{g}{cm^3}\cdot\left[\frac{H_0}{100\ km/s/Mpc}\right]$

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_{crit}}$$

Das gleiche im Rahmen der allg. Relativitätstheorie

- Masse krümmt Raum
- 1D-Form der Feldgleichungen
- "Thermodynamik" $\qquad dU = -P\,dV$

$$\frac{d}{dt}\left((\rho c^2) a^3\right) = -P\frac{da^3}{dt} \qquad (17)$$

- Gleichungen lassen "kosmologische Konstante" zu

Es ergibt sich (Herleitung kommt später)

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}}$$ Friedman Gleichung

NB: $\Lambda > 0$ erlaubt statische Lösung $\dot{a} = \ddot{a} = 0$

$a(t)$ hängt von ρ, P, Λ und $H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_0$ ab

Masse / Energiekomponenten des Universums:

1) Materie: zumeist gilt $P = v_{therm}^2 \rho \ll \rho c^2$
"druckfrei"

2) Strahlung $P_r = \frac{1}{3}\rho_r c^2$

3) Vakuumsenergie $P_v = -\rho_v c^2$ "negativer Druck"
physikalisch wenn das Vakuum nicht in Grundzustand ist.

Herleitung der Friedman Gleichung

$$\frac{d}{dt}(14) \rightarrow 2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3}\left(\dot{\rho} a^3 + 2a\dot{a}\rho\right)$$

$$\frac{d}{dt}(17) \rightarrow \dot{\rho} a^3 + 3\rho a^2 \dot{a} = -3Pa^2 \frac{\dot{a}}{c} \rightsquigarrow \dot{\rho} \text{ term ersetzen}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)$$

$$\rho = \rho_{materie} + \rho_{strahlung} + \rho_{vacuum}$$

$$P = P_{strahlung} + P_{vacuum}$$

$$\rho_v = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$\rho_{strahlung} = \frac{\varepsilon_{strahlung}}{c^2}$$

Die versch. Beiträge zur "Dichte" ρ haben versch. $a(t)$ Abhängigkeiten

$$\rho_m \sim \rho_{0,m} \cdot a^{-3}$$

$$\rho_r \sim \rho_{0,r} \cdot a^{-4} \quad (\text{photonen dichte } a^{-3}; \text{ phot. energie } a^{-1})$$

$$\rho_v \sim \rho_{v,0} = \text{const.}$$

man schreibt oft: $\Omega_m = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{crit}}$; $\Omega_r = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{crit}}$; $\Omega_\Lambda = \frac{\rho_v}{\rho_{crit}} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$

Damit wird:

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 \equiv H^2(t) = H_0^2 \times \left[\frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{1-\Omega_m-\Omega_\Lambda}{a^2} + \Omega_\Lambda\right]$$

$\Rightarrow$ Ausdehnungsgeschichte, $\left(\frac{\dot a}{a}\right)(t)$, wird durch 'kosmologische Parameter' bestimmt.

N.B. "Integrationskonstante" K in Gl. (18) hat $\left[\frac{1}{\text{länge}^2}\right] \Rightarrow$ Krümmung

$$K = \left(\frac{H_0}{c}\right)^2 \left(1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda \cancel{- \Omega_{rad}}\right)$$

klein heute

$\Rightarrow$ erst dominiert $\frac{\Omega_r}{a^4}$, dann $\frac{\Omega_m}{a^3}$, dann Ω_Λ

Simple Lösungen: $\frac{\Omega_m}{a^3}$ - term dominiert $\longrightarrow a \sim t^{2/3}$

Ω_Λ - term " $\longrightarrow a \sim e^t$

beschleunigte Ausdehnung

Konsequenzen:

1) Wenn $\dot{a}(t_0) > 0$, dann $\dot{a}(t) > 0$ $t < t_0$ $\longrightarrow$ Urknall
Big Bang

2) Rotverschiebung

Betrachte zwei aufeinander folgende Wellenberge

$$ds^2_{photon} = 0 \Rightarrow dt = -\frac{a(t)}{c}\, dr$$

co-expandierende Koord.

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_r^0 dr = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} \Rightarrow \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \cancel{1+z} \rightarrow \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emm}} = 1+z$$

$\Rightarrow$ Rotversch. misst den Faktor, um den sich das Universum zwischen Photonemission und -ankunft ausgedehnt hat.

Beobachtbare Größen

im expandierenden Universum ist

Winkelgröße $\neq \frac{1}{D}$

Helligkeit $\neq \frac{1}{D^2}$

Betrachten wir den Fall

$\Omega_r \ll 1$ und $1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda \ll 1$

$$\Rightarrow H^2(z) \approx H_0^2 \underbrace{\left(\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda\right)}_{E(z)}; \quad dz = da$$

$\frac{dz}{E(z)} \sim$ Photonenlaufzeit von $(z+dz, z)$

Lichtweg $D_c = \underbrace{\frac{c}{H_0}}_{D_{Hubble}} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$

Ein Objekt der physikalischen Länge 1 (quer zur Sichtlinie) erscheint unter einem Winkel

$$\delta\vartheta \sim \frac{1}{D_A}$$ angular diameter distance

$$D_A = \frac{D_c}{1+z}$$ "Vergrößerung" des Objekts durch Raumausdehnung

Leuchtkraftentfernung $D_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi S}}$

S = gemessener Fluß (über alle Frequenzen)

L = Leuchtkraft $\frac{erg}{s}$ in alle Richtungen & Frequenzen

$$D_L = (1+z)^2 D_A$$

Warum? $(1+z)$ = Energieverlust der Photonen

$(1+z)$ = Zeitverzögerung in der Photonenankunfts-frequenz

Zusammenfassung:

- Isotropie, Homogenität & Ausdehnung $\longrightarrow$ "Robertson Walker Metrik"
- Dynamik der Ausdehnung (Friedman Gl.) $\rightarrow$ hängt von $\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda$ und H_0 ab
- Rotverschiebung $(1+z) \approx (1+\frac{v}{c})$ = Ausdehnungsfaktor des Universums während der Lichtlaufzeit