Lösung zur Übung 5

24. Juni 2010

Aufgabe 1

a)

Mit den gegebenen Annahmen vereinfacht sich die Expansionsgleichung zu

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2(t) = H_0^2(t) \cdot (a^{-3}(t)\Omega_m + \Omega_\Lambda)$$

Unter der Annahme $\Omega_m = 1$ (und mit $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$) vereinfacht sich die Gleichung weiter zu

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2(t) = H_0^2(t) \cdot a^{-3}(t)$$

Diese Differentialgleichung kann man mit der Methode der Separation der Variablen lösen (Wurzelziehen links, alle a-Terme auf eine, alle t-Terme auf die andere Seite bringen, integrieren). Man integriert dabei sinnvollerweise vom Urknall ausgehend ($t' = 0$, $a'(0) = 0$) bis $t' = t, a'(t') = a$, also

$$\int_0^a \frac{da'}{\sqrt{a'}} = \int_0^t H_0 dt'$$

und erhält so den gewünschten Zusammenhang zwischen t und z als

$$t(z) = 2/(3H_0) \cdot \left(\frac{1}{1+z}\right)^{3/2} = (1+z)^{-3/2} \cdot 2.9 \cdot 10^{17}\text{s} = (1+z)^{-3/2} \cdot 9 \cdot 10^9\text{Jahre}$$

Man sollte dabei in Erinnerung behalten, dass diese Lösung eine Näherungslösung ist für $\Omega_m = 1$ und $\rho = \rho_{crit}$.

b)

Unter obiger Annahme hatte das Universum bei der Rotverschiebung $z = 1100$ das Alter $2.5 \cdot 10^5$ Jahre.

c)

Unter obiger Annahme hatte das Universum bei der Rotverschiebung $z = 7$ das Alter $4 \cdot 10^8$ Jahre.

d)

Unter obiger Annahme lag zwischen $z = 4$ und $z = 5$ die Zeit von $1.9 \cdot 10^8$ Jahren.

Aufgabe 2

a)

Betrachte Anzahl an Photonen N bei einer bestimmten Frequenz ν pro Einheitsvolumen V. Die Strahlungsenergiedichte eines Schwarzen Körpers ist gegeben durch

$$I_\nu = \frac{dE}{dt\, dA\, d\nu\, d\Omega} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT_1}) - 1}$$

Hilfreicher ist es aber in diesem Zusammenhang die Anzahldichte der Photonen pro Frequenzintervall im Einheitsvolumen zu betrachten:

$$\frac{dn_\nu}{d\nu} = \frac{dN}{d\nu dV} = \frac{4\pi I_\nu}{h\nu c} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT_1}) - 1}$$

Mit $dV = cdtdA$
Wir wollen uns nun diese Größe zu einem späteren Zeitpunkt $t_2 > t_1$ anschauen, zu dem sich das Universum um $a(t_2)/a(t_1)$ ausgedehnt hat. Photonen, die bei t_1 mit der Frequenz ν emittiert worden sind, haben daher bei t_2 die Frequenz $\nu' = \nu/(1+z)$ (sind also rotverschoben). Außerdem gilt $d\nu' = d\nu/(1+z)$. Da die Anzahldichte sich verhält wie $a^{-3} = (1+z)^3$, erhalten wir für t_2:

$$\frac{dn'_{\nu'}}{d\nu'} = \frac{dn_\nu/(1+z)^3}{d\nu/(1+z)}$$

Einsetzen der obigen Relationen und kürzen ergibt

$$\frac{dn_\nu/(1+z)^3}{d\nu/(1+z)} = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{8\pi(1+z)^2\nu'^2}{c^3} \frac{1}{\exp\frac{h(1+z)\nu'}{kT_1} - 1} = \frac{8\pi\nu'^2}{c^3} \frac{1}{\exp\frac{h\nu'}{kT_2} - 1}$$

Man sieht, dass die Formel die gleiche Form hat wie $dn_\nu/d\nu$ von oben (es ist also immer noch Schwarzkörperstrahlung), aber mit $T_2 = T_1/(1+z)$.
Siehe dazu auch Schneider Kap. 4.3, S. 157f.

b)

Die Gesamtzahl der Photonen pro Volumen n ist gegeben durch

$$n = \int_0^{\inf} \frac{dn_\nu}{d\nu}$$

Dieses Integral ist nicht trivial lösbar. Man kann aber näherungsweise das Integral $\int I_\nu$ ausrechnen, das durch die Stefan-Boltzmann-Relation $P/A = \sigma T^4$ gegeben ist und statt durch die Energie jedes einzelnen Photons zu teilen, durch die Energie eines Photons am Maximum der Planck-Verteilung, $h\bar{\nu}$, teilen. Rechnungsweg:

$$n \approx \frac{8\pi}{\bar{\nu}c^3} \int_0^{\inf} \frac{\nu^3}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} = \frac{8\pi}{\bar{\nu}c^3} \frac{k^4T^4}{h^4} \int_0^{\inf} \frac{x^3}{\exp(x) - 1}$$

In Tabellen findet man $\int_0^{\inf} \frac{x^3}{\exp(x)-1} = \pi^4/15$. Damit ergibt $n \approx 2 \cdot 10^8 \mathrm{m}^{-3}$. Der tatsächliche Wert ist etwa doppelt so hoch.
Der Fehler der Näherung liegt darin, für die mittlere Frequenz das Maximum der Planck-Verteilung zu wählen, die nicht gleich der mittleren Frequenz ist (denn es gibt einige, wenige, Photonen mit sehr hohen Energie, den "Hochenergie-Schwanz"). Integriert man numerisch exakt $\int_0^{\inf} \frac{x^2}{\exp(x)-1} = 2.4$ erhält man $n = 3.98 \cdot 10^8$, was ziemlich genau der gemessenen CMB-Photonendichte entspricht.

c)

Das Verhältnis der Anzahldichte der CMB-Photonen zur Anzahldichte der Nukleionen ist mit $n_p \approx 1\text{m}^{-3}$ damit etwa $4 \cdot 10^8$. Rechnet man die Nukleonendichte heute exakt aus, z.B. mit Hilfe der kritischen Dichte: $n_p = \Omega_{\text{Baryonen}} \cdot \rho_{\text{krit}}/m_p = 0.25/\text{m}^{-3}$, erhält man für das Verhältnis Photonendichte / Baryonendichte den korrekten Wert $1.6 \cdot 10^9$.

d)

Die mittlere freie Weglänge λ ist gegeben durch $\lambda = 1/(n\sigma)$, wobei n die Teilchenzahldichte der Stoßpartner ist und σ der relevante Streuquerschnitt. Man erhält für $z = 2000$, $\lambda = 1.6 \cdot 10^{19}\text{m} = 10^3$ Lichtjahre.