3. Übung zu: Astronomie & Astrophysik II

(Abgabe: Do., 13.5.2004)

Aufgabe 3.1: Free-fall Zeit und Akkretion

Der Kollaps von Gas- oder Molekülwolken im ISM erfolgt unter der eigenen Gravitation. Nimmt man an, daß eine sphärische Gaswolke zu einem Zeitpunkt t_0 zu kollabieren beginnt, so kann man die Zeit ausrechnen, die der Kollaps bis zum Zentrum dauert, die sogenannte Free-Fall Zeit $\tau_{\rm ff}$.

a) Leiten Sie einen Ausdruck fuer $\tau_{\rm ff}$ ab, für ein sphärisches Gebiet mit Anfangsdichte ρ_0 und Anfangsradius r_0. Machen Sie vereinfachend die Annahme, dass die Beschleunigung des Kollapses die ganze Zeit konstant ist. (Zusatzaufgabe, 3 Extrapunkte (!): Zeigen Sie, daß der exakte Ausdruck für $\tau_{\rm ff}$ *ohne* diese Annahme $\tau_{\rm ff} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}}$ ist.) Interpretieren Sie die Formel für $\tau_{\rm ff}$.

Antwort:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow a = \frac{2r}{t^2} \qquad \text{(Bewegung mit konstanter Beschleunigung)} \\ a &= \frac{GM}{r_0^2} = \frac{4\pi G\rho}{3}\frac{r_0^3}{r_0^2} \\ \Rightarrow \frac{2r}{t^2} &= \frac{4\pi G\rho}{3} r_0 \\ \Leftrightarrow t &= \tau_{\rm ff} = \sqrt{\frac{3}{2\pi\rho G}} \end{aligned}$$

b) Angenommen, im Zentrum des Gebietes befindet sich ein Stern, der die einfallende Masse aufnimmt (akkretiert). In grober Näherung ist die Akkretionsrate $\dot{M} \approx M_J/\tau_{\rm ff}$, also der gesamten Jeans-Masse des kollabierenden Gebietes geteilt durch die Free-Fall Zeit. Drücken Sie die Akkretionsrate einmal als Funktion der Temperatur und einmal als Funktion der Schallgeschwindigkeit in dem Medium aus. Interpretieren Sie auch diese Formel für die Akkretionsrate.

Antwort:

$$\begin{aligned} M_J &= \frac{\pi^{5/2}}{6}\sqrt[3]{\frac{kT}{G\mu m_H}}\rho^{-1/2} \qquad \text{(Jeans Masse)} \\ \tau_{\rm ff} &= \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}} \\ \dot{M} &\approx M_J/\tau_{\rm ff} \\ \Rightarrow \dot{M} &\approx \sqrt{8/27}\pi^2\left(\frac{kT}{m_H\mu}\right)^{3/2}\frac{1}{G} \approx 5.4\left(\frac{kT}{m_H\mu}\right)^{3/2}\frac{1}{G} = 5.4\frac{c_s^3}{G} \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie die Akkretionsrate für eine Schallgeschwindigkeit von $c_s = 0.2$ km/s (in Sonnenmassen pro Jahr).

Antwort:

$$\dot{M} \approx 5.4 \cdot \frac{c_s^3}{G} = 5.4 \cdot 200^3/(6.672 \cdot 10^{-11})\,\mathrm{kg/s} = 10^{-5}\,\mathrm{M_\odot/yr}$$

Aufgabe 3.2: Eigengeschwindigkeiten von Sternen

Nehmen Sie an, dass sich die Sonne und ein Stern auf der selben Kreisbahn mit der selben Geschwindigkeit in der Ebene in der Ebene der Milchstraße bewegen. Zeigen Sie, daß die beobachtete Eigenbewegung des Sterns unabhängig von der Entfernung Erde–Stern ist. Wie ist Eigenbewegung definiert? Wie groß ist die Eigenbewegung des Sterns (Bogensekunden pro Tag)?

Antwort:
Stern–Sonne–Milchstraßenzentrum sind gleichschenkliges Dreieck. Bewegung um Winkel ϕ der Sonne um das Zentrum führt zu Winkel ϕ Drehung der Gerade Sonne–Stern, unabhängig vom Winkel zwischen Sonne und Stern (und damit unabhängig von der Entfernung), da die Winkel im Dreieck konstant sind.
Eigenbewegung ist (Winkel-)Bewegung im Vergleich zu unendlich entferntem Fixpunkt.
230 Millionen Jahre für einen Umlauf. Pro Jahr also $1/2.3 \cdot 10^8$ **des Kreises, also** $360 \cdot 60 \cdot 60''/2.3 \cdot 10^8\,\mathrm{yr} = 0.0056''\,\mathrm{yr}$