2. Übung zu: Astronomie & Astrophysik II

(Abgabe: Do., 29.4.2004)

Aufgabe 2.1:

Das Jeans Instabilitätskriterium für den Kollaps von ISM Gas kann mittels Störungstheorie exakt ausgerechnet oder über den Virialsatz einfacher abgeschätzt werden. Zeigen Sie, daß der Virialansatz für die Jeans Masse

$$M_J \simeq 5.46 \left(\frac{k_B T}{Gm}\right)^{3/2} \rho^{-1/2}$$

liefert, mit dem Molekülgewicht m. Rechnen Sie auf dem Weg dahin auch einen Ausdruck für die Jeans Länge aus. Nehmen Sie wie in Aufgabe 1.1 ein nichtentartetes monoatomares Gas an und wie in Aufgabe 1.2, daß die Dichte der Region konstant ist.

Antwort:

Virialsatz: $2E_{\rm kin}/-E_{\rm pot} = 1$ **im Gleichgewicht**

$$\begin{aligned}
E_{\rm kin} &= 3/2 k_B T \cdot N_{\text{Moleküle}} = 3/2 k_B T M/m \\
E_{\rm pot} &= -3/5 G M^2/R \\
\Rightarrow 2E_{\rm kin}/-E_{\rm pot} &= \frac{3k_B T M/m}{3/5 G M^2/R} \\
\Rightarrow R_{\rm J} &= \frac{1}{5}\frac{GMm}{k_B T} \\
\text{mit} \quad M(R) &= \frac{4\pi}{3}\rho R^3 \\
\Rightarrow R_{\rm J} &= 1.09\sqrt{\frac{k_B T}{\rho G m}} \\
\text{jetzt Masse :} & \\
\Leftrightarrow R &= \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} \\
\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} &= \frac{1}{5}\frac{GMm}{k_B T} \\
\Longrightarrow M_{\rm J} &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \rho^{-1/2} 5^{3/2} \left(\frac{k_B T}{Gm}\right)^{3/2} \\
&= 5.46 \cdot \rho^{-1/2} \left(\frac{k_B T}{Gm}\right)^{3/2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.2:

Bestimmen Sie die Jeans Länge und Masse für a) ein ISM mit einer Dichte von $\rho = 30\,\mathrm{H\,I/cm^3}$, einer Temperatur $T = 200\,\mathrm{K}$ und ausschließlich Wasserstoff als Gas, und b) Gas mit der Dichte, Temperatur und Zusammenseztung der Atmosphäre der Erde auf Meeresniveau (~100% Stickstoff, 1018 hPa, 15° C; nehmen Sie an, daß die obige Formel auch für N_2 gilt). c) Interpretieren Sie die Masse- und Längenskalen in beiden Fällen im jeweiligen Kontext (Weltraum bzw. Erdoberfläche).

Antwort:

a)

$$
\begin{aligned}
m_{HI} &= 1\mathrm{u} = 1.66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \\
R_J(\mathrm{ISM}) &= 1.09\sqrt{\frac{k_B \cdot 200\,\mathrm{K}}{4.98 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{kg/m^3} \cdot Gu}}\,\mathrm{m} = 7.7 \cdot 10^{17} = 25\,\mathrm{pc} \\
M_J(\mathrm{ISM}) &= 5.46 \cdot 3.9 \cdot 10^{24} \cdot 4.48 \cdot 10^{9}\,\mathrm{kg} \\
&= 9.55 \cdot 10^{34}\,\mathrm{kg} = 4.8 \cdot 10^{4}\,\mathrm{M_\odot}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
m_{N_2} &= 2 \times 14\mathrm{u} = 4.65 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg} \\
pV &= NkT \qquad \text{(ideale Gasgleichung)} \\
\Rightarrow N &= pV/kT = 1013\,\mathrm{hPa} \cdot 1\,\mathrm{m^3}/(1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 289\,\mathrm{K}) \\
\Rightarrow N &= 2.5 \cdot 10^{25}\,\mathrm{N_2/m^3} \\
\Rightarrow \rho &= 1.18\,\mathrm{kg/m^3} \\
R_J(\mathrm{Erde}) &= 1.09\sqrt{\frac{k_B \cdot 289\,\mathrm{K}}{1.18\,\mathrm{kg/m^3} \cdot Gu}} = 1.9 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m} = 19000\,\mathrm{km} \\
M_J(\mathrm{Erde}) &= 5.46 \cdot 4.6 \cdot 10^{22} \cdot 0.91\,\mathrm{kg} \\
&= 2.3 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}
\end{aligned}
$$

c)

Sternhaufen können sich bilden, aber noch keine einzelnen Sterne. 25 pc ist großes Gebiet, aber entspricht Größe von beobachteten Sternentstehungsgebieten. Die Atmosphäre der Erde kann nicht kontrahieren, da die Jeans Masse nicht erreicht wird. Turbulenzen in der Atmosphäre (=Wind) durchmischen dauernd und dominieren die Energiebilanz (=innere Energie).